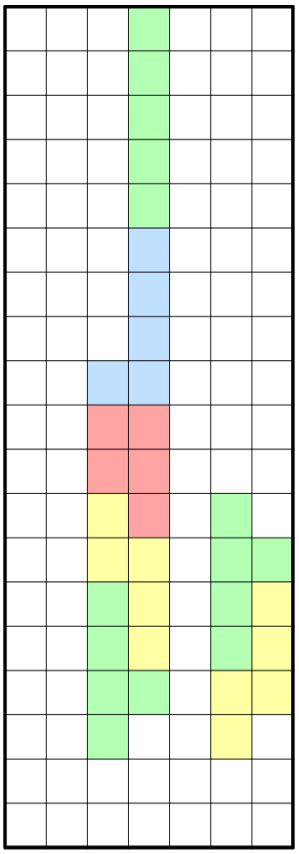
最適化①　ペントミノの塔　解説　（出題/解説 fff）

この解説は、
・どのように考えれば短時間でよいスコアを出すことができたか
という視点での解説となります。

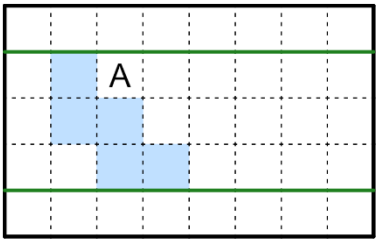
この問題において最も重要な考察は、「n>mならばn階のマス数がm階のマス数以上である」ということでした。
言い換えると、上の方の階を構成するマス数が増えてしまうと、その後どれだけ頑張っても増えたマス数分のロスが下の階までかならず伝搬されてしまう、ということがわかります。
このことから、できるだけ幅1マス、 2マス、 3マスの区間を増やすように積んでいく必要があるとわかります。
このことを意識すると1マス、2マスの区間を増やすためには次のように積む必要があるとわかります。
なお、YミノとNミノは交換可能です。
図1.



ここまでくると残っているポリオミノは7つだけです。
上記の考察を踏まえて幅3ができるだけ長くなるように試行錯誤しましょう。

試行錯誤している最中に、残ったポリオミノの中でWミノが幅3の途中には出現できない、ということに気づくことができると試行錯誤がやりやすくなるでしょう。

図2.



上記のように幅3の中にWミノを置こうとしたとき、Aのマスを占められるのはILYNWPのみですが、いずれもすでに使われています。

図1の下側、幅2から幅3に切り替わるところでWミノを消費するとロスが少ないということを踏まえ、このパターンで幅3をできるだけ保つようにすることで次のページの27階/1階の幅6の解を得ることができました。

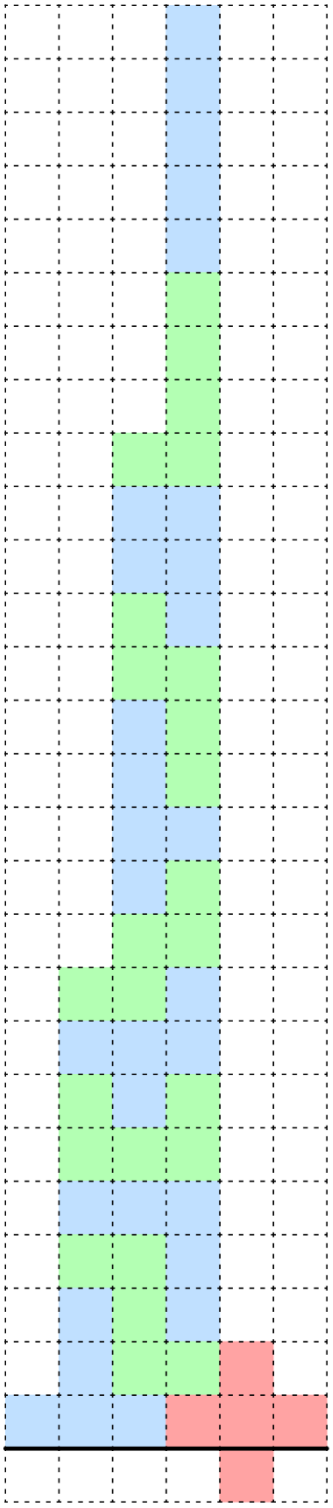
※最適解について
作者は
・幅3をこれ以上長くすることは不可能と思われる
・幅3を増やすことなく27列幅7を構成するには2階幅4、1階幅7が必要だが、これを実現することは不可能と思われる（Vミノが1階にあることがすぐ確定し、実質的に幅3を長くすることが必要になる）
ことからこの解が最適であると考えていますが、場合分けを完全列挙した厳密な証明ではないため誤りの可能性もあります。肯定的または否定的に解決した方はぜひご連絡ください。

参考: 当日の順位
複数の参加者が地下にポリオミノを置いてよいことを見落とし、地下なし26階幅6の解を提出していました。誤読しにくくなるよう強調するなど配慮が必要だったなと感じました。

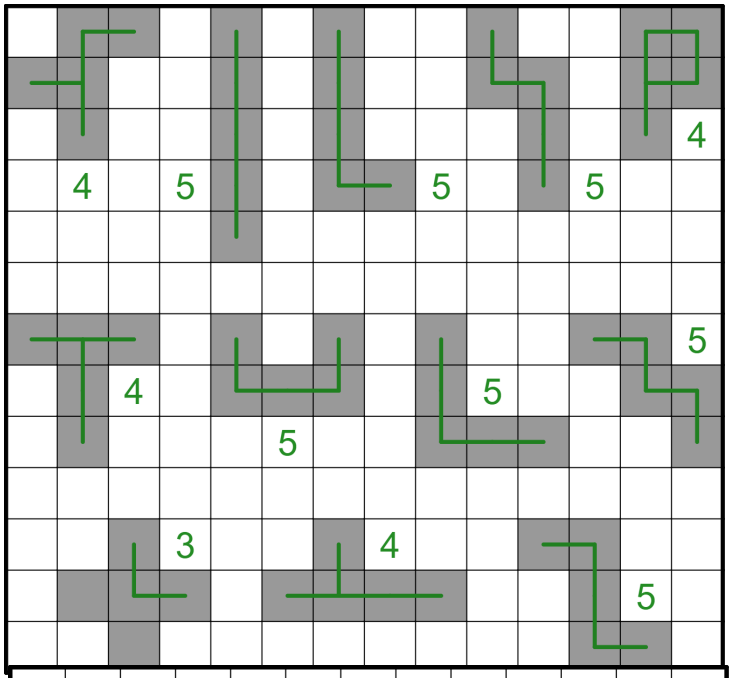
（最適化2問合わせて制限時間45分）

順位	高さ	1段目の幅
1	27	6
1	27	6
3	27	4
4	26	6
4	26	6
4	26	6
4	26	6
8	26	5
8	26	5
8	26	5
11	25	7
12	25	6
13	25	3
14	22	7
15	21	6
16	19	6

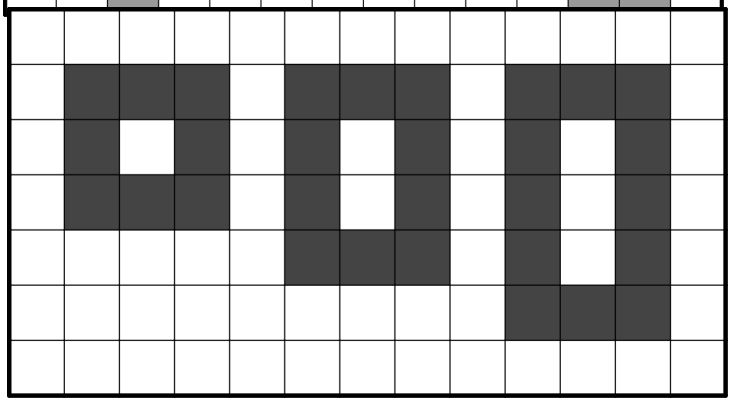
想定解: 27階/ 1段目の幅6



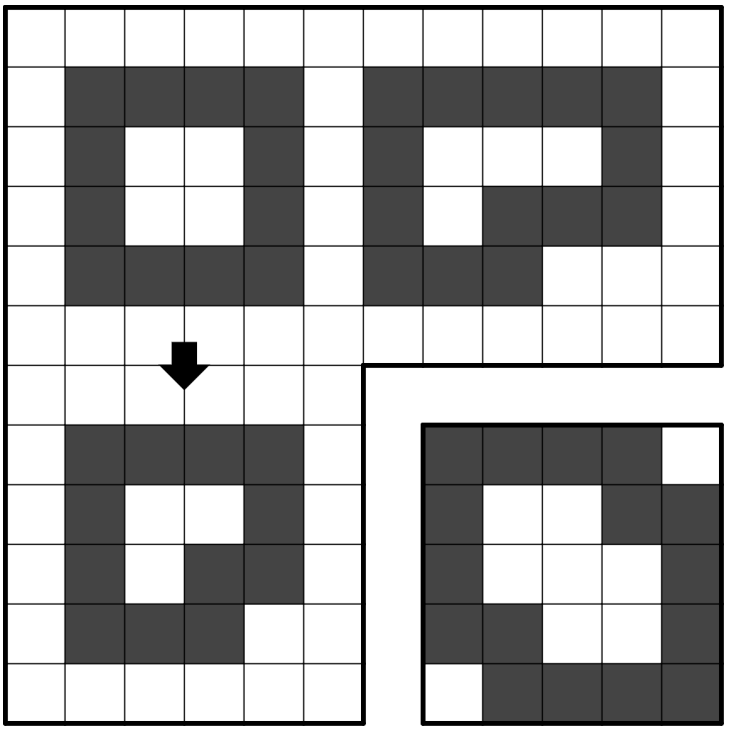
最適化②　ペントボロス　解説　(出題/解説 ホーム)



まず全てのペントミノを用意して、それらすべてに最も多くのマスを通過する一筆書きのルートを書き込んでみる。いくつかは複数のルートを持つものもある。ルールより、ひとつのペントミノを2度通過できないので(最短のパスを採用するため)、ウロボロスに含まれないペントミノのマスを最小化しようとすると、左に書き込んだルートのマス全てを使う必要がありそうである。
とりあえずマスを全部足し合わせてみると合計は54である(5*7+4*4+3=54)。
次は実際にウロボロスを構成することを考えてみる。



まずは最小のウロボロスから考えてみる。内部のマスは1マスで、長さは8マスである。次に内部を1マス増やすと長さは10マスになる。この例から分かるのは、内部のマスを1マス増やすとウロボロスが2マス長くなりそうだということである。内部のマスをnマスと置くと長さは2(n-1)+8マスで表されることが分かると思う。ただし、これはある条件の元でのみ成り立つ。

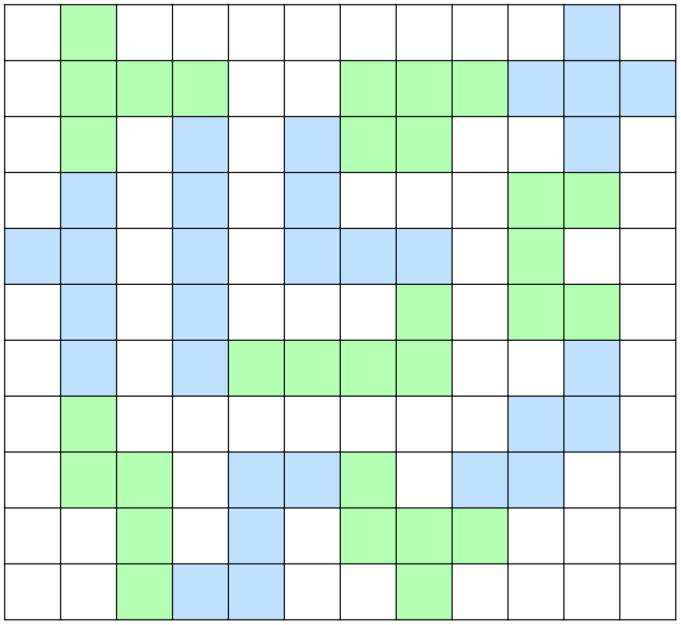


左の図の上側には内部が4マスのウロボロスが二つある。ここで長さを数えてみると、左側の方が右側に比べて2マス少ないことに気づくと思う。
理由は単純で、左側のウロボロスは長さを変えずに内部が3マスのウロボロスに変換できるからである。
つまり、内部に格子点を含む場合、ある内部マス数のウロボロスが最大持てる長さからロスが生まれてしまうのだ。
これを今回解いていたパズルに当てはめると、長さが54マスのウロボロスを最小の内部マスを持つように作りたかったので、内部に格子点を持たないウロボロスを作る必要があると分かる。
そしてその条件を満たせたと仮定して、長さが2(n-1)+8マスで表されることを思い出して、2(n-1)+8=54を解くとn=24を得る。つまり内部が24

マスで格子点を持たないウロボロスを作れば最小化できると分かる。あと考えるのは被覆長方形の最小化とペントミノの兼ね合いだけである。ウロボロスの被覆長方形を最小にするのは、内部マスの被覆長方形を最小にすることとほとんど同じことだというのは分かるだろう。そのため、24マスの内部マスをどうにか小さい長方形に収めるという方向で考えて、それをペントミノで作りつつ調整するという方向がよさそうである。

様々なルールから、直接隣接しない内部マス同士は、最低白マスを3マス挟まないといけないことが分かる。これらの兼ね合いから、頑張って正方形に渦巻き状に入れるという方向や、それがダメそうならU字に折り曲げるというのがよさそうだと分かる。そして、内部マスは分岐しても構わないため、とげとげさせるのも効率がいい。あとは一番上の図を見ながら試すのみだ。

解答例
未使用6 内部24 対角線の長さ10√2



参考：当日の順位
（最適化2問合わせて制限時間45分）

順位	マス数の和	辺1	辺2	対角線長^2
1	30	10	11	221
2	30	9	12	225
3	30	9	13	250
4	30	13	11	290
5	30	10	14	296
6	30	9	18	405
7	31	9	12	225
8	31	10	14	296
9	33	11	11	242
10	34	8	18	388
11	35	12	14	340
12	38	18	3	333
13	39	12	10	244
14	39	16	9	337
15	47	6	9	117
16	失格	-	-	-